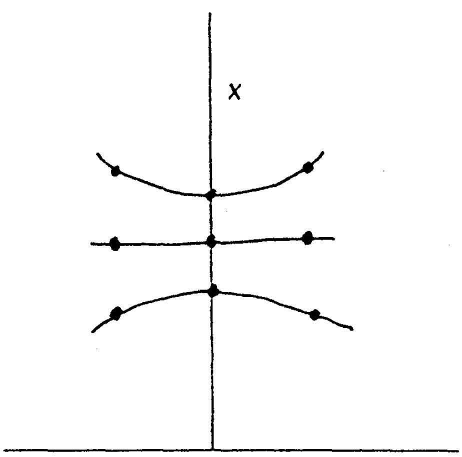
15．視覚とイメージの幾何学

東工大理学部　　北原和夫、斉藤伸行、寺門弘訓
茨城大工学部　　安久正紘

1．初めに

我々の周りにある世界を我々が見るとき、目に先ず情報が捉えられ、次いで神経を通して脳に伝えられて認識するに至る。我々が見る物と認識とは必ずしも一対一対応していないと考えられる。「錯覚」がその例である。同じ物でも周囲の影響で違った物に見える。我々の外に客観的に存在する物を「物理空間」(physical space)と呼び、脳に於ける情報処理の後に認識した物を「視空間」(visual space)と呼ぶことにする。「物理空間」と「視空間」との間の対応を議論する。

歴史的にはHelmholtzがhoropterという概念を提出している。[1]これは被験者に水平に並んだ二つの光源を見せる。その中点と被験者とを結ぶ線上にもう一つの光源を置きこれを前後に動かして、三つの光源が一直線上に並んでいるように見えるところを被験者に決めさせる。これらの三つの光源は物理空間で必ずしも一直線に並んでいるとは限らない。実際には左図のように遠方では凹に、近い所では凸になっている。三点が作る曲線をhoropterと呼ぶのである。



左目　　右目

この実験から明らかなように我々は外の世界を負曲率の空間として認識していることになる。[2] なぜ負曲率かについての理由は明かでないが、おそらく外か

らの視覚情報をできるだけ多く取り入れて処理しようとするからであろうと想像される。つまり広がった世界の情報を頭の中ではコンパクトに再構築しているのであろうと考えられるのである。

1913年にBlumenfeldが、直線の認識にparallel alleyとdistance alleyの違いがあることに注目した。[3] parallel alleyというのは、先ず遠方にx軸に対称に二つの固定点を置き、この二固定点の外にx軸に対称な点の対をいくつか提示してこれらの点が一組の平行線に見えるようにしたものである。一方、distance alleyを得るには、先ず遠方の二固定点の外に、x軸に関して対称なもう一組の二点を提示してその二点間の距離が遠方の二固定点間の距離と等しく見えるようにする。この手続きを順次行うことにより、遠方の二固定点間の距離と同じ間隔に見える二点の組が得られる。これがdistance alley である。

これについてYamazakiが次のような幾何学的解釈を与えている。[4]先ず視空間での長短でmetricを定義する。物理空間におけるベクトルをAとするとこれはデカルト座標系の基底u_iを用いて$A=A^iu_i$と表される。このベクトルは視空間でA という成分を持つベクトルとして認識されるとする。A^iとA^αとの間には

$$A^\alpha=W^\alpha{}_iA^i \tag{1}$$

なる関係がある。ベクトルAとして物体の微小変位$dx=dx^iu_i$を考える。これは視空間ではdx^αとして認識され、物理空間における変位dx^iに対して$dx^\alpha=W^\alpha{}_idx^i$という関係にある。 この変位の大きさは視空間での大きさで認識されるから、これを

$$(ds)^2=dx^\alpha dx^\alpha=\delta_{\alpha\beta}W^\alpha{}_iW^\beta{}_jdx^idx^j=g_{ij}dx^idx^j \tag{2}$$

と表す。g_{ij}は計量テンソルである。次ぎに平行移動を定義する。 あるベクトルAを物理空間でdxだけ動かしたときに視空間において変化しないならばAは平行移動したように認識される。よって平行移動とは$dA^\alpha=0$ということである。これを物理空間で表現すると

$$dA^i+\Gamma^i{}_{kj}dx^kA^j=0 \quad \text{（平行移動）} \tag{3}$$

となる。ここで

$$\Gamma^i{}_{kj}dx^k=(W^{-1})^i{}_\alpha dW^\alpha{}_j \tag{4}$$

parallel alleyは視空間で方向を変えないという意味での平行線であるから、

$$d^2x^i+\Gamma^i{}_{jk}dx^jdx^k=0$$

で与えられる。一方、distance alleyは距離の認識によって得られるものである

から、

$$d^2x^i+\{^i{}_{ik}\}dx^j dx^k=0 \tag{5}$$

で与えられる。ここで、$\{^i{}_{ik}\}$はRiemann-Christoffel テンソルと呼ばれるもので、

$$\{^i{}_{ik}\}=(1/2)g^{ih}(\partial_i g_{hk}+\partial_k g_{ih}-\partial_h g_{ik}) \tag{6}$$

で定義される。$\Gamma^i{}_{jk}=\Gamma^i{}_{kj}$のときのみ$\Gamma^i{}_{jk}=\{^i{}_{jk}\}$であるから、一般にはparallel alleyとdistance alleyは異なる。

以上は言わば静的な変化に対する認識の問題である。もし対象の変位の速度が認識に影響を与える場合はどのような数理模型が可能であるか。物理空間における長さxの関数として視空間における長さξは次のように表されるものとする。

$$\xi=\xi(x,\ dx/xt,\ \ldots) \tag{7}$$

最も簡単な場合として

$$\xi=x(1+\alpha\, dx/dt) \tag{8}$$

という模型を考えることもできよう。このとき、$\alpha>0$ならば、伸びつつある線分はより長く見え、縮みつつある線分はより短く見えることになる。次ぎに実際に行った実験の結果を報告する。

2.実験

(a)装置、被験者

PC(NEC PC98XL) display上に同じ長さの二本の線分を水平に並べて表示する。右側の線分はreferenceとして固定し、左側の線分の長さを変化させる。被験者は左側と右側の線分の長さが同じだと思ったときにキーを押す。線分の変化は初期値は120 dots その後は$x=120+50\sin(2\pi t/T)$[dots]とする。ここでTは周期であり、実験は一つの周期について10周期継続して行う。被験者は男子学生並びに大学院生10名である。

(b)測定結果

一つの周期に対して10周期実験を行うので線分が伸びつつあるときと縮みつつあるときとがそれぞれ10回繰り返される。n回目に左側の線分が伸びつつあるとき、被験者がreference(右側の線分)と同じ長さだと判断した左側の線分の長さをXI_n[dots]とすると、referenceの線分からの相対的なずれは、

$$DI_n=(XI_n-120)/120 \tag{9}$$

で定義される。同様にして縮みつつあるときについてはn回目における線分の長さをXR_n[dots]として、相対的なずれを

$$DR_n=(XR_n-120)/120 \tag{10}$$

で定義する。

表1は各周期に対して、DI_n，DR_nを10周期並びに10人の被験者について平均したものである。

周期(sec)	DI_nの平均	DR_nの平均
31	-0.86	2.74
22	1.02	0.81
13	3.40	0.51

線分が縮みつつある場合、線分は実際の長さよりも短く認識されるようである。この傾向は特に周期が長い場合（即ちゆっくりと線分の長さを変化させる場合）顕著である。

線分が伸びつつある場合、周期が長いと、線分は実際の長さより長く認識される。しかし、周期が短くなったときにDI_nの平均が正になり逆の認識となる。これは、被験者がキーを押すのに遅れてしまうことによると考えられる。

図1はDR_{n+1}をDR_nの関数としてプロットしたものである。1(a)は周期が31secの場合、1(b)は周期が13secの場合である。線分の変化速度が大きくなると順次行う認識の相関が無くなることが分かる。つまりはや過ぎると判断がランダムになる。

図 1

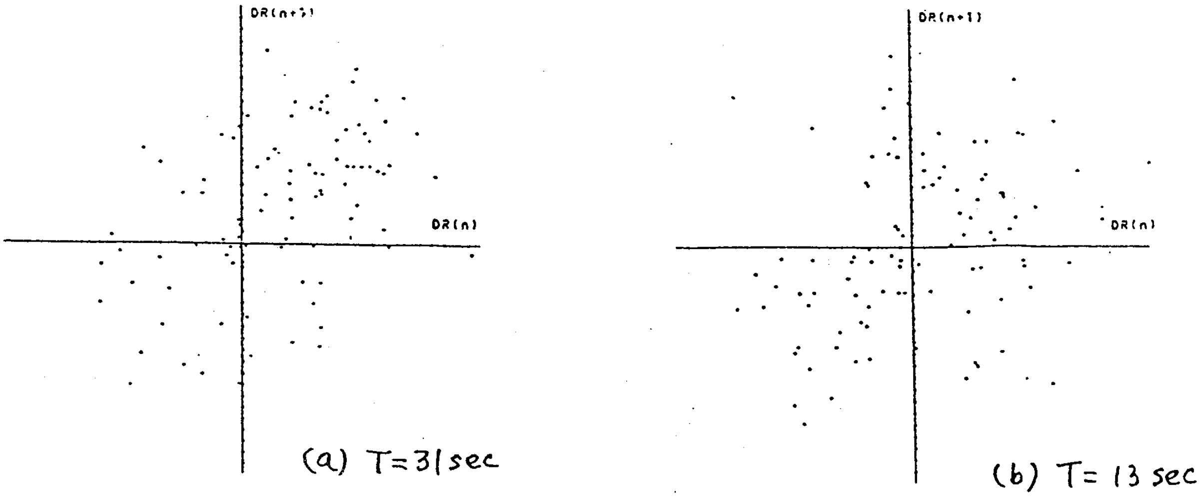
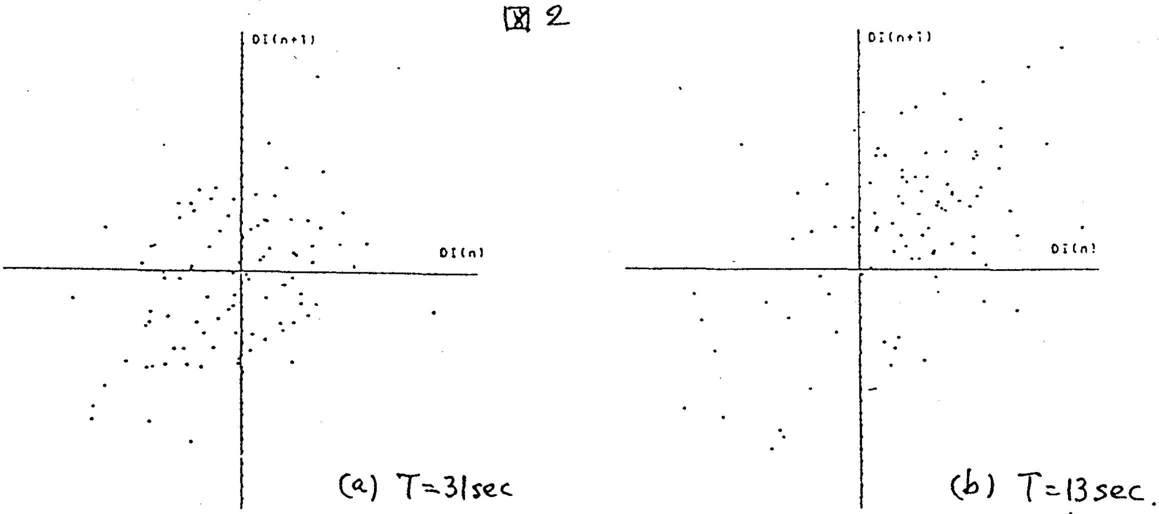


図2は同じ相関を線分が伸びつつある場合について示した。線分の長さの変化速度が大きいと判断が乱れる傾向は同じである。

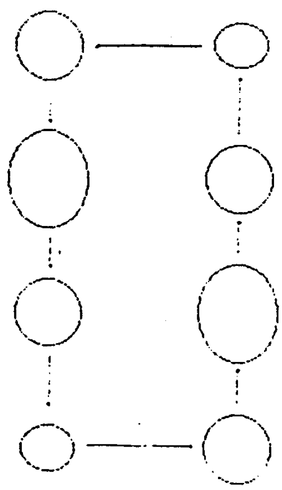
図2



(a) T=31sec　　(b) T=13sec.

3.二次元の認識の実験

PC(NEC 98XL)のdisplay上に楕円を描きこれを図3のように時間的に変化させる。



被験者は楕円が円になったと判断したときにキーを押す。この場合はreferenceの図形を必要としない。楕円の水平方向の径aと垂直方向の径bの時間依存性は

$$a(t)=80(1+t/T)[\text{dots}] \qquad 0 \leqq t \leqq T/2$$

$$80(2-t/T)[\text{dots}] \qquad T/2 \leqq t \leqq T$$

$$b(t)=64(1+t/T)^2[\text{dots}] \qquad 0 \leqq t \leqq T/2$$

$$64(2-t/T)^2[\text{dots}] \qquad T/2 \leqq t \leqq T$$

とする。ここでTは周期でT=13，6[sec]について実験を行った。

被験者がキーを押したときのb(t)/a(t)-1の平均値を表2に示す。

周期T(sec)	縦長になるときの b/a-1	横長になるときの b/a-1
13	-0.335	0.585
6	0.360	-0.430

周期が短くなるとb/a-1の符号が逆になるのは、キー押しの遅れのためと思われる。周期が長い場合、縦長になるときには実際よりももっと縦長に見えていることになる。横長になるときには実際よりももっと横長に見えていることになる。このずれの相対的な値は線分の実験の場合に較べて小さい。つまり、二次元図形のほうが長さの認識が正確になるということを意味する。これは長さだけでなく、形態を見て判断しているからであると考えられる。

4.まとめ

形態の認識が変化の経路とその変化速度に依存することが考えられる。Marrもこのことを指摘している。[5]よって従来の静的模型だけでは不十分で動的な（時間も変数に加えた）数理模型が必要である。

文献

[1]渡辺恵子　「両眼視空間の幾何学」-講座心理学15数理心理学（東京大学出版会）

[2] Luneburg, R,K. "Mathematical Analysis of Binocular Vision"(Princeton Univ.Press. 1947)

[3] Blumenfeld, W. Zeitschrift f Psychologie u Physiologie d Sinnesorgane, 65 241-404(1913)

[4] Yamazaki, T. J.Mathematical Psychology, 31 270-298(1987)

[5] Marr, D. "Vision"(Freemann, 1982)